数理解析研究所講究録
22巻 1967年 65-76

散乱の理論における定常的方法について

浅野 潔 (京大数研)

§1. 問題と結果.

我々が考察する問題は，自己共役作用素の絶対連続スペクトルの摂動論，およびいわゆる散乱理論の抽象的取扱いに関するものである。ここでは，文献[1]−[4]において，Birman 等により述べられた結果(の1部)について解説する。

Hilbert space $\mathfrak{H}$ における2つの自己共役作用素 H_0, H_1 を考える。H_j ($j=0,1$) の spectre 分解を $\int \lambda dE_\lambda^j$ とし，また $R_z^j = (H_j - zI)^{-1}$ とかく。E_λ^j から作られる spectral measure を $E^j(\Delta)$ (Δ は，R の Lebesgue 可測集合)とし，$\mathfrak{G}_j = \{ f \in \mathfrak{H}$; $(E^j(\Delta)f, f)$ が R 上の絶対連続測度$\}$ とする。$\mathfrak{G}_j$ は H_j を reduce する $\mathfrak{H}$ の閉部分空間である。$\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{G}_j$ への正射影を P_j とかく。

我々の目的は，H_0 と H_1 とが適当な意味で'近い'ときに，

(I) H_0 と H_1 の絶対連続な部分(i.e. H_0P_0 と H_1P_1)の unitary equivalence を示す。

(II) Wave operator $W_\pm = s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH_1}e^{-itH_0}P_0$ の存在を示す。

(III) Scattering operator $S = W_+^* W_-$ の性質を調べる

などである。

$\mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{H}_\beta$ を任意の Hilbert space とするとき，$\mathfrak{H}_\alpha$ から $\mathfrak{H}_\beta$ への nuclear *operator* の全体を $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\beta)$, *Hilbert-Schmidt operator* の全体を $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\beta)$ とかくことにする。$\mathfrak{C}_p(\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\alpha)$ を，たんに $\mathfrak{C}_p(\mathfrak{H}_\alpha)$ とかく。また $\mathfrak{H}_\alpha$ における *bounded operator* の全体を，$\mathcal{B}(\mathfrak{H}_\alpha)$ で表わす。

問題 (I) および (II) に関して，次の定理が成立つ。

定理 1. 次の条件：

(I) $\quad H_1 - H_0 = V \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$

を仮定する。このとき，次の条件をみたす $W_\pm \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ が存在する：

1) $\quad W_\pm E_0(\Delta) = E_1(\Delta) W_\pm , \qquad W_\pm P_0 = P_1 W_\pm = W_\pm ,$

$W_\pm^* W_\pm = P_0 , \qquad W_\pm W_\pm^* = P_1 \qquad \&$

$W_\pm H_0 P_0 = H_1 P_1 W_\pm .$

2) $\quad W_\pm = s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_0} P_0 \qquad \&$

$W_\pm^* = s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_0} e^{-itH_1} P_1 .$

上の定理の内容自体は，よく知られた結果である。証明には，大別して，"時間を含む方法" と "時間を含まない方法（定常的方法）" とがある（文献 [5]，[7] − [10] 参照）。ここでは，[3] においてスケッチされた方法で証明を与えよう。

簡単な考察により，条件 (I) のもとでは，$\mathfrak{H}$ を *separable* と仮定しても一般性を失わないことがわかる。従って，$\mathfrak{H}_j$ をいわゆる " *direct integral* " の形で表わすことにより，$H_j P_j$ を "対角化" することができる。$\mathfrak{H}_j = \int_{\Lambda_j} \oplus\, \mathfrak{H}_\lambda^j \, d\lambda$ としよう。定理 1 により，$\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda$. かつ，$\mathfrak{H}_\lambda^0$ から $\mathfrak{H}_\lambda^1$ への *unitary* (*i.e. isometric & onto*) *operator*

$W_\pm(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ が存在して，$f(\lambda) \in \mathfrak{g}_0$ に対して $(W_\pm f)(\lambda) = W_\pm(\lambda) f(\lambda)$ $\in \mathfrak{g}_1$ が a.e. $\lambda \in \Lambda$ に対して成立つ。

$S = W_+^* W_-$ により scattering operator S を定義しよう。S は $\mathfrak{g}_0$ における unitary operator となり，かつ，$\mathfrak{h}_\lambda^0$ における unitary operator S_λ が存在して，$f(\lambda) \in \mathfrak{g}_0$ に対して $(Sf)(\lambda) = S_\lambda f(\lambda)$ が a.e. $\lambda \in \Lambda$ に対して成立つ。S_λ を S-matrix とよぶ。

条件 (I) の下で，$T_z = P_0(I - VR_z)VP_0 \in C_1(\mathfrak{g}_0)$。故に，$\mathfrak{g}_0 = \int_\Lambda \oplus \mathfrak{h}_\lambda^0 \, d\lambda$ において，T_z は"核表示"をもつ，すなわち $T_z(\lambda, \mu) \in C_1(\mathfrak{h}_\mu^0, \mathfrak{h}_\lambda^0)$ $(\lambda, \mu \in \Lambda)$ が存在して，$f(\lambda) \in \mathfrak{g}_0$ に対して $(T_z f)(\lambda) = \int_\Lambda T_z(\lambda, \mu) f(\mu) \, d\mu$ (a.e. $\lambda \in \Lambda$)。$T_z(\lambda, \mu)$ は，(λ, μ) の（強）可測函数であり，さらに $T_z(\lambda, \lambda)$ も λ の（強）可測函数である。S_λ に関して，次の定理が成立つ。

定理 2. 条件 (I) のもとで，

1) $t\text{-}\lim_{z \to \nu \pm i0} T_z(\lambda, \mu) \equiv T_{\nu \pm i0}(\lambda, \mu)$ が，a.e. $\nu \in R$，a.e. $\lambda \in \Lambda$，a.e. $\mu \in \Lambda$ に対して存在する（$t\text{-}\lim$ は，$C_1(\mathfrak{h}_\mu^0, \mathfrak{h}_\lambda^0)$ の位相に関する収束の意），

2) $S_\lambda = I_\lambda - 2\pi i \, T_{\lambda + i0}(\lambda, \lambda)$ (a.e. $\lambda \in \Lambda$)，

3) $K(\lambda) \in C_1(\mathfrak{h}_\lambda^0)$ (a.e. $\lambda \in \Lambda$) が存在して，$S_\lambda = e^{-2\pi i K(\lambda)}$，かつ $\int_\Lambda |K(\lambda)|_1 \, d\lambda \leq \|V\|_1$。ただし，$|K(\lambda)|_1$ は $C_1(\mathfrak{h}_\lambda^0)$ における trace norm，$\|V\|_1$ は，$C_1(\mathfrak{h})$ における trace norm とする。

条件 (I) のもとで，$VR_z^0 \in C_1(\mathfrak{h})$ $(\mathrm{Im}\, z \neq 0)$。従って，matrix の

determinant の拡張として，$\Delta(z) = \det(I + VR_z^0)$ なる函数が定義される。$\Delta(z)$ は，$\mathrm{Im}\, z \neq 0$ で解析的であり，かつ $\Delta(\bar{z}) = \overline{\Delta(z)}$，$\Delta(z)$ と S_λ の間には，次の関係がある。

定理3．条件 (I) のもとで，

1) $\Delta(z) = e^{\int_\Lambda \frac{\xi(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda}$，ここに $\xi(\lambda) = \mathrm{tr}\, K(\lambda)$。故に，$\lim_{z \to \lambda \pm i0} \Delta(z) \equiv \Delta(\lambda \pm i0)$ が a.e. $\lambda \in R$ に対して存在する，

2) $\det S_\lambda = e^{-2\pi i \xi(\lambda)} = \frac{\Delta(\lambda - i0)}{\Delta(\lambda + i0)}$ （a.e. $\lambda \in \Lambda$）。

定理2および3にどんな数理物理的な意味があるかは，筆者にはわからないが，たとえば H_0 と H_1 とが適当な固有函数展開をもつ場合には，これらの結果は，いわゆる *phase shift formula* や，S の相互作用表示などと関係がつくようである。また，条件 (I) は非常に強い制限なので，これをもっと緩い条件におきかえることが応用上望ましいが，この問題については，§3 でふれたい。応用上は，$\mathfrak{H} = L^2(R_x^n)$，$H_0 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$ であることが多いが，この場合 H_1 が固有函数展開をもつと，いろいろと好都合である。§3 にあげるたいていの条件のもとで，H_1 の絶対連続な部分は，一般化された固有函数をもつけれども，H_1 が特異連続な部分をもたないことを保証する条件は，別に課さなければならない（[9] 参照）。

§2．定理1の証明．

[3] による証明では，次の補題が重要な役割を演ずる。

補題．A を $\mathfrak{H}$ における自己共役作用素（$A = \int \lambda dF_\lambda$），$\Gamma_z =$

$(A-zI)^{-1}$, $D\in\mathfrak{C}_2(\mathfrak{H})$ とする。このとき,

1) 任意の $f\in\mathfrak{H}$ に対して, $DF_\lambda f$ は λ の(強)有界変動函数であり, 従って, a.e. λ に対して(強)微分 $\frac{d}{d\lambda}(DF_\lambda f)$ が存在する。 $\frac{d}{d\lambda}(DF_\lambda f)$ は, λ の(強)可測函数である;

2) 任意の $f\in\mathfrak{H}$ に対して, $s\text{-}\lim_{z\to\mu\pm i0} D\Gamma_z f \equiv D\Gamma_{\mu\pm i0} f$ が a.e. μ で存在し, かつ $\mathrm{p.v.}\int\frac{1}{\lambda-\mu}d(DF_\lambda f)$ も a.e. μ で存在して, a.e. μ で

$$D\Gamma_{\mu\pm i0}f = \mathrm{p.v.}\int\frac{1}{\lambda-\mu}d(DF_\lambda f) \pm \pi i\frac{d}{d\mu}(DF_\mu f),$$

3) $D^*F_\lambda D$ は $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$ の位相で(強)有界変動函数である。従って, a.e. λ で $\frac{d}{d\lambda}(D^*F_\lambda D)\equiv K_\lambda\in\mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$ が存在し, (強)可測となる。

4) $s\text{-}\lim_{z\to\mu\pm i0} D^*\Gamma_z D \equiv D^*\Gamma_{\mu\pm i0}D\in\mathfrak{C}_2(\mathfrak{H})$ が a.e. μ で存在し, かつ $\mathrm{p.v.}\int\frac{1}{\lambda-\mu}d(D^*F_\lambda D)$ も a.e. μ で存在して, a.e. μ で

$$D^*\Gamma_{\mu\pm i0}D = \mathrm{p.v.}\int\frac{1}{\lambda-\mu}d(D^*F_\lambda D)\pm\pi i\frac{d}{d\mu}(D^*F_\mu D),$$

ここに $s\text{-}\lim$ は $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{H})$ における収束を意味する。

定理1の証明にかかろう。 $Q_z^0 = I + VR_z^0$, $Q_z^1 = I - VR_z^1$ とおく。簡単な計算により,

(1) $\quad Q_z^1Q_z^0 = Q_z^0Q_z^1 = I$,

(2) $\quad R_z^0 - R_{\bar z}^0 = Q_z^{0*}(R_z^1 - R_{\bar z}^1)Q_z^0$,

(3) $\quad Q_z^{1*}(R_z^0 - R_{\bar z}^0) = (R_z^1 - R_{\bar z}^1)Q_z^0$.

(2), (3) より, 任意の $f, g\in\mathfrak{H}$ に対して,

(4) $\quad ((R_z^0 - R_{\bar z}^0)f, g) = ((R_z^1 - R_{\bar z}^1)Q_z^0 f, Q_z^0 g)$

(5) $\quad ((R_z^0 - R_{\bar z}^0)f, Q_z^1 g) = ((R_z^1 - R_{\bar z}^1)Q_z^0 f, g)$.

(4), (5) において, $z \to \mu \pm i0$ として両辺の極限を考える。そのためにいくつかの記号を定義する： V が自己共役であることに注意すると, $B = |V|^{\frac{1}{2}}$, $\Theta = \mathrm{sgn}\, V$ とおいて, $V = B\Theta B$ とかくことができる. ここに, $B \in \mathfrak{C}_2(\mathfrak{H})$, $\Theta \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$。 $f \in \mathfrak{H}$ に対して, $BR^j_{\mu\pm i0}f$ が存在して補題 2) の等式が成立する μ の全体を Λ^j_f で表わす。また, $BR^j_{\mu\pm i0}B$ が存在して補題 4) の等式が成立する μ の全体を Λ^j で表わす. 最後に, f, $g \in \mathfrak{H}$ に対して, $\lim\limits_{z\to\mu\pm i0}((R^j_z - R^j_{\bar z})f, g) = \pm 2\pi i \frac{d}{d\mu}(E^j_\mu f, g)$ となる μ の全体を $\Lambda^j_{f,g}$ で表わす。明らかに, Λ^j_f, Λ^j, $\Lambda^j_{f,g}$ 等の補集合は, 測度 0 の集合である。$C \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ とすると $CB \in \mathfrak{C}_2(\mathfrak{H})$ であるが, $(CB)R^j_{\mu\pm i0}f = C(BR^j_{\mu\pm i0}f)$ であるから, 我々はこれを $CBR^j_{\mu\pm i0}f$ とかく。また, $s\text{-}\lim\limits_{z\to\mu\pm i0} Q^j_z f = s\text{-}\lim\limits_{z\to\mu\pm i0}(I + (-1)^j VR^j_z)f = f + (-1)^j \times VR^j_{\mu\pm i0}f = f + (-1)^j B\Theta BR^j_{\mu\pm i0}f$ を $Q^j_{\mu\pm i0}f$ とかく。

(4) において $z \to \mu\pm i0$ としよう。(4) の左辺は, $\mu \in \Lambda^0_{f,g}$ ならば $\pm 2\pi i \frac{d}{d\mu}(E^0_\mu f, g)$ に近ずく。次に

$$
\begin{aligned}
(4)\text{ の右辺} &= ((R^1_z - R^1_{\bar z})(I + VR^0_z)f, (I + VR^0_{\bar z})g) \\
&= ((R^1_z - R^1_{\bar z})f, g) + (\Theta BR^0_z f, B(R^1_{\bar z} - R^1_z)g) \\
&\quad + (B(R^1_z - R^1_{\bar z})f, \Theta BR^0_z g) \\
&\quad + (B(R^1_z - R^1_{\bar z})B \cdot \Theta BR^0_z f, \Theta BR^0_z g)
\end{aligned}
$$

より, 次のことがわかる： $z \to \mu \pm i0$ のとき,

第1項 $\longrightarrow \frac{d}{d\mu}(E^1_\mu f, g) \quad (\mu \in \Lambda^1_{f,g})$,

第2項 $\longrightarrow (\Theta BR^0_{\mu\pm i0}f, \mp 2\pi i \frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu g)) \quad (\mu \in \Lambda^0_f \cap \Lambda^1_g)$,

第3項 $\longrightarrow (\pm 2\pi i \frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu f), \Theta BR^0_{\mu\pm i0}g) \quad (\mu \in \Lambda^1_f \cap \Lambda^0_g)$,

第4項 → $(\pm 2\pi i \frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu B)\cdot \Theta B R^0_{\mu\pm i0} f,\ \Theta B R^0_{\mu\pm i0} g)$

$(\mu \in \Lambda^1 \cap \Lambda^0_f \cap \Lambda^0_g)$.

故に(4)の右辺は，$\mu\in\Lambda^0_f\cap\Lambda^1_f\cap\Lambda^0_g\cap\Lambda^1_g\cap\Lambda^1\cap\Lambda^1_{f,g}=\Sigma^1_{f,g}$ ならば，

(6)
$$\pm 2\pi i\Big\{\frac{d}{d\mu}(E^1_\mu f,g) + (\Theta BR^0_{\mu\pm i0}f,\ \frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu g)) + (\frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu f),\ \Theta BR^0_{\mu\pm i0}g) + (\frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu B)\cdot\Theta BR^0_{\mu\pm i0}f,\ \Theta BR^0_{\mu\pm i0}g)\Big\}$$
$$= \pm 2\pi i \frac{d}{d\lambda}\Big[(E^1_\lambda f,g) + (\Theta BR^0_{\mu\pm i0}f,\ BE^1_\lambda g) + (BE^1_\lambda f,\ \Theta BR^0_{\mu\pm i0} g) + (BE^1_\lambda B\cdot\Theta BR^0_{\mu\pm i0}f,\ \Theta BR^0_{\mu\pm i0}g)\Big]_{\lambda=\mu}$$

に近ずく。一方(6)の[ ]の中は($\mu\in\Lambda^0_f\cap\Lambda^0_g$ ならば存在して)，$(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ Q^0_{\mu\pm i0}g)$ に等しい。(6)の[ ]内の形から，$\lambda\in\Lambda^1_{f,g}\cap\Lambda^1_f\cap\Lambda^1_g\cap\Lambda^1$ ならば，$\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ Q^0_{\mu\pm i0}g) = \frac{d}{d\lambda}[\quad]$ が存在する。そして $\mu\in\Sigma^1_{f,g}$ ならば，$\frac{d}{d\lambda}[\quad]$ において $\lambda=\mu$ とおくことができ，(6)が得られる。結局，$\lambda,\mu\in\Sigma^1_{f,g}$ ならば $\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ Q^0_{\mu\pm i0}g)$ が存在し，$\lambda=\mu$ とおくと(6)が得られることがわかった。以上のことから，

(7)
$$\frac{d}{d\mu}(E^0_\mu f,g) = \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ Q^0_{\mu\pm i0}g)\Big|_{\lambda=\mu}\quad(\mu\in\Lambda^0_{f,g}\cap\Sigma^1_{f,g}).$$

(7)の右辺は明らかに μ の可測函数である((6)の形にかけるから)。

同様に(5)において $z\to\mu\pm i0$ とすることにより，

(8)
$$\frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda f,\ Q^1_{\mu\pm i0}g)\Big|_{\lambda=\mu} = \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ g)\Big|_{\lambda=\mu}$$
$$(\mu\in\Lambda^0_{f,g}\cap\Lambda^0_f\cap\Lambda^1_g\cap\Lambda^1_{f,g}).$$

(8)の両辺が μ の可測函数になることも，各辺を(6)のような形に分解してみればわかる。

$\lambda,\mu\in\Lambda^1_{f,g}\cap\Lambda^0_f\cap\Lambda^1_g\cap\Sigma^1_{f,f}\cap\Lambda^0_{f,f}\cap\Lambda^1_{g,g}$ とすると，

$$(9)\qquad \left|\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ g)\right| \leq \left\{\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ Q^0_{\mu\pm i0}f)\right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda g,\ g)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

が成立つ。(9) において $\lambda=\mu$ とおけば，(7) より

$$\left|\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ g)\Big|_{\lambda=\mu}\right| \leq \left\{\frac{d}{d\mu}(E^0_\mu f,\ f)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{d}{d\mu}(E^1_\mu g,\ g)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

故に

$$(10)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ g)\Big|_{\lambda=\mu}\right| d\mu \leq \|P_0 f\|\,\|P_1 g\|.$$

我々は次の式によって operator $\mathbb{W}_\pm$ を定義しよう：

$$(11)\qquad (\mathbb{W}_\pm f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda f,\ Q^1_{\mu\pm i0}g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu .$$

(10) によって $\mathbb{W}_\pm$ を定義する積分が収束し，$|(\mathbb{W}_\pm f, g)| \leq \|P_0 f\|\|P_1 g\|$ より $\mathbb{W}_\pm \in B(\mathfrak{H})$ がわかる。$\mathbb{W}_\pm$ の第2の表示式は (8) による。

$\mathbb{W}_\pm P_0 = P_1 \mathbb{W}_\pm = \mathbb{W}_\pm$ は，(11) より明らか。$\Delta=(a,b]$ に対して，

$$\begin{aligned}
(\mathbb{W}_\pm E^0(\Delta)f,\ g) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda E^0(\Delta)f,\ Q^1_{\mu\pm i0}g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= \int_{\Delta}\frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda f,\ Q^1_{\mu\pm i0}g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= \int_{\Delta}\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ E^1(\Delta)g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= (\mathbb{W}_\pm f,\ E^1(\Delta)g) \\
&= (E^1(\Delta)\mathbb{W}_\pm f,\ g).
\end{aligned}$$

故に $\mathbb{W}_\pm E^0(\Delta) = E^1(\Delta)\mathbb{W}_\pm$。これより $\mathbb{W}_\pm H_0 P_0 = H_1 P_1 \mathbb{W}_\pm$ も得られる。

最後に $\mathbb{W}_\pm^* \mathbb{W}_\pm = P_0$（複号同順）を示そう。やや形式的に計算すると

$$\begin{aligned}
(\mathbb{W}_\pm f,\ \mathbb{W}_\pm g) &= \int \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0}f,\ \mathbb{W}_\pm g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= \int d\mu\,\frac{d}{d\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{d}{d\xi}(Q^0_{\mu\pm i0}f,\ E^1_\xi Q^0_{\eta\pm i0}g)\Big|_{\xi=\eta} d\eta\right]_{\lambda=\mu}
\end{aligned}$$

$$= \int d\mu \ \frac{d}{d\xi}(Q^0_{\mu\pm i0} f, E^1_\xi Q^0_{\eta\pm i0} g)\Big|_{\xi=\eta=\mu}$$
$$= \int \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, Q^0_{\mu\pm i0} g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu$$
$$= \int \frac{d}{d\mu}(E^1_\mu f, g)\, d\mu$$
$$= (P_0 f, g)。$$

これより $W_\pm^* W_\pm = P_0$ を得る。ただし上の計算を合理化するためには,

$$(Q^0_{\mu\pm i0} f, E^1_\xi Q^0_{\eta\pm i0} g)$$
$$= (E^1_\xi f, g) + (\textcircled{H} B R^0_{\mu\pm i0} f, B E^1_\xi g)$$
$$+ (B E^1_\xi f, \textcircled{H} B R^0_{\eta\pm i0} g) + (B E^1_\xi B \ \textcircled{H} B R^0_{\mu\pm i0} f, \textcircled{H} B R^0_{\eta\pm i0} g)$$

より, ξ, η, $\mu \in \Sigma^1_{f,g}$ ならば $\frac{d}{d\xi}(Q^0_{\mu\pm i0} f, E^1_\xi Q^0_{\eta\pm i0} g)$ が存在し,かつ $\xi = \eta = \mu$ とおくことができることに注意すればよい。

同様の計算より $W_\pm W_\pm^* = P_1$ が得られる。これで 1) の証明は完了した。

2) は, Fourier 変換と Hilbert 変換を用いて簡単に証明される([5] 参)。

§3. 補足.

我々は $S = W_+^* W_-$ によって S を定義した。$(Sf, g) = (W_- f, W_+ g)$ に, §2 の後半の計算を適用すると, S の表示式が得られる:

$$(12) \qquad (Sf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu-i0} f, Q^0_{\mu+i0} g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda Q^1_{\mu+i0} Q^0_{\mu-i0} f, g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu .$$

ここで第1の表示式から第2の表示式を得るために (8) を用いた。定理2の 2) は, (12) の後半の式から証明できる。

定理2および3の証明は省略して, 定理1の条件 (I) を緩めることを考えよう。'作用素の函数' なる概念を用いると, 条件 (I) は次のように緩

められる（［7］参照）：

(II)　次の条件をみたす'admissible'な函数の列 $\{\phi_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する：

1)　$\phi_n(\lambda)$ は $(-n, n)$ で univalent，

2)　$\phi_n(H_1) - \phi_n(H_0) \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$.

ここに $R = (-\infty, \infty)$ で定義された実数値函数 $\phi(\lambda)$ が'admissible'とは，"有限個の開区間 I_k が存在して，① $R = \bigcup \bar{I}_k$，② 各 I_k 上で $\phi(\lambda)$ は狭義単調，連続微分可能，$\phi'(\lambda) \neq 0$ かつ $\phi(\lambda)$ は有界変動"なることをいう。

たとえば，次の条件 (II)' から (II) が従う。

(II)'　ある整数 $k>0$ と z ($\mathrm{Im}\, z \neq 0$) に対して $(R_z^1)^k - (R_z^0)^k \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$.

我々はまた，条件(II) をやや異なる方向に緩めることができる。$\Delta = [a, b]$ に対して，次の条件(III) は $H_0 P_0 E^0(\Delta)$ と $H_1 P_1 E^1(\Delta)$ との unitary equivalence を与える $W_\pm(\Delta)$ の存在を保証する（［2］参照）：

(III)　$E^1(\Delta) H_1 E^0(\Delta) - E^1(\Delta) H_0 E^0(\Delta) \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$，かつ $\Delta_n \subset \Delta$ が存在して $\Delta - \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ は測度0の集合で $E^1(\Delta^c) E^0(\Delta_n)$，$E^0(\Delta^c) E^1(\Delta_n) \in \mathfrak{C}_\infty(\mathfrak{H})$. ここに $\mathfrak{C}_\infty(\mathfrak{H})$ は，$\mathfrak{H}$ の完全連続作用素の全体を表わす。

条件 (III) のもとで，定理1の結果は，P_0 を $P_0 E^0(\Delta)$ に P_1 を $P_1 E^1(\Delta)$ におきかえた形で 1)，2) とも成立する。特に $\mathcal{D}(H_0) = \mathcal{D}(H_1)$ なるときには，条件 (III) の後半は，"$E^1(\Delta^c \cap [-N, N]) E^0(\Delta_n)$，$E^0(\Delta^c \cap [-N, N]) E^1(\Delta_n) \in \mathfrak{C}_\infty(\mathfrak{H})$（十分大きな N に対して）" と緩められる。このことから，たとえば次の条件 (III)' が $W_\pm(\Delta)$ の存在を保証することがわかる

(III)'　$\mathcal{D}(H_0) = \mathcal{D}(H_1)$，かつ $(R_z^1)^k (H_1 - H_0)(R_z^0)^l \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$　($k, l > 0$)．

文　献

[1] M. Š. Birman, Conditions for the existence of wave operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 143 (1962), 506–509 ; Soviet Math. Dokl. 3 (1962), 408–411.

[2] M. Š. Birman, A local criterion for the existence of wave operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 159 (1964), 485–488 ; Soviet Math. Dokl., 5 (1964), 1505–1509.

[3] M. Š. Birman and S. B. Entina, A stationary approach in the abstract theory of scattering, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 155 (1964), 506–508 ; Soviet Math. Dokl., 5 (1964), 432–435.

[4] M. Š. Birman and M. G. Kreĭn, On the theory of wave operators and scattering operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 144 (1962), 475–478 ; Soviet Math. Dokl., 3 (1962), 740–744.

[5] T. Kato, On finite dimensional perturbations of self-adjoint operators, J. Math. Soc. Japan, 9 (1957), 239–249.

[6] 加藤敏夫, 散乱演算子と連続スペクトルの摂動, 数学, 9 (1957), 75–84.

[7] T. Kato, Wave operators and unitary equivalence, Pac. J. Math., 15 (1965), 171–180.

[8] S. T. Kuroda, Stationary methods in the theory of scattering, Perturbation theory and its applications in quantum mechanics, 185–214, John Wiley & Sons, New York, 1966.

[9] S. T. Kuroda, An abstract stationary approach to perturbations of continuous spectra and scattering theory, to appear.

[10] 黒田成俊，散乱の定常論と固有函数展開，I，数学．18 (1966), 74-85,
II, 18 (1966), 137-144.

付記．

散乱の問題を取扱う定常的方法には，他に黒田氏（[8], [9]）によって開発された興味深い方法がある．Birman 等の方法が direct integral 的であるのに対して，黒田氏の方法は Hellinger-Hahn 的であるという感じである．黒田氏の方法は，黒田氏自身が [10] で解説しておられるので，ここでは述べなかった。なお [10] の §1 は，定常的方法に対する入門的解説になっている。